|  |
| --- |
| PRINCIPIOS DE PROBABILIDAD  |
| *Experimentos resultados y conjuntos**Método de asignación de probabilidades**Uniones, intersecciones y relaciones entre eventos**Algunas relaciones básicas de probabilidad**Tablas de contingencia y tablas de probabilidad**Probabilidad condicional**Las dos reglas de la probabilidad**Teorema de Bayes**Técnicas y reglas de conteo* |

TEMA Nº1

**TEMA 1**

**PRINCIPIOS DE PROBABILIDAD**

* 1. **Experimentos resultados y conjuntos**

**Probabilidad: Es** una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento.

**Probabilidad de un evento:** Es la posibilidad numérica medida entre 0 y 1, de que ocurra un evento.

**Evento o suceso:** Es un subconjunto de un espacio muestral, es un conjunto de puntos experimentales.

**Espacio muestral**: Es el conjunto de todos los posibles resultados para un experimento.

**Experimento:** Es toda acción bien definida que conlleva un resultado único bien definido.

Ejemplo: si lanzamos dos monedas al aire podemos obtener los siguientes resultados…

S=$\left\{\left(c,c\right)\left(c,s\right)\left(s,c\right)(s,s)\right\}$

Donde:

Escudo está representado por “s” y cara por “c”

El espacio muestral es: $S=\left\{\left(c,c\right)\left(c,s\right)\left(s,c\right)(s,s)\right\}$

El experimento es cualquiera de los puntos que observamos ya sea (c,c), (c,s), (s,c) o (s,s)

Podemos denominar al evento A –por ejemplo-, a aquel que aglutina a aquellos puntos muestrales o experimentales que contengan cara y escudo como ser … A= $\left\{\left(c,s\right)\left(s,c\right)\right\}$.

 La probabilidad del evento A seria igual a: P(A)= A/S

* 1. **Método de asignación de probabilidades**

Antes de mencionar los métodos debemos hacer referencia a los requerimientos básicos para su asignación.

* La probabilidad asignada a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1

$0\leq P(Ei)\leq 1$ Para toda i (iesimo resultado experimental)

* La suma de las probabilidades para los resultados experimentales debe ser igual a uno.



1. *El método clásico*: Es apropiado cuando los resultados experimentales son equiprobables, o tienen la misma probabilidad de tener éxito. Ejemplo lanzar una moneda o un dado.
2. *El método de frecuencia relativa*: es apropiado cuando se cuenta con datos para estimar la proporción del tiempo en que ocurrirá el resultado experimental, este método utiliza datos que se han observado empíricamente, registra la frecuencia con que ha ocurrido algún evento en el pasado y estima la probabilidad de que el evento ocurra nuevamente en base a estos datos históricos.

Ejemplo:

Se registra el numero de computadores vendidos cada día, por un lapso de 100 días de un mínimo de 0 (ningún computador vendido a un máximo de cuatro computadores vendidos por día, con el objeto de determinar las frecuencias relativas. En la primera columna de la izquierda se apunta el número de computadores vendidos (Variable), en la columna central se anota el números de días que se repitió el suceso (frecuencia) y en la columna de la derecha observamos la frecuencia relativa (Probabilidad).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Numero de computadores vendidos (Ei) | Número de días | P(Ei) |
| 0 | 6 | 6/100 = | 0.06 |
| 1 | 36 | 36/100 = | 0.36 |
| 2 | 16 | 16/100 = | 0.16 |
| 3 | 18 | 18/100 = | 0.18 |
| 4 | 24 | 24/100 = | 0.24 |
|   | 100 |   | 1 |

1. *Método subjetivo*.- este método es el más apropiado cuando es irreal suponer que los resultados experimentales son equiprobables y cuando se tienen datos poco relevantes. Cuando se emplea este método para asignar probabilidades a los resultados experimentales, podemos usar cualquier información disponible como nuestra experiencia o intuición. Después de considerar toda la información disponible, se especifica un valor de probabilidad que expresa nuestro grado de creencia de que ocurrirá el resultado experimental.
	1. **Uniones intersecciones y relaciones entre eventos**

**Conjunto:** Es toda reunión de objetos

**Intersección de conjuntos**: es el conjunto de todos los elementos que están tanto en un conjunto “y” en otro a la vez.

**Unión de conjuntos:** Es el conjunto de todos los elementos que están en uno “o” en otro de los conjuntos.

 Diagrama de Venn

Todos los elementos del conjunto “A”

Todos los elementos del conjunto “B”

 Todos los elementos del conjunto “A y B”

Un diagrama de Venn es una herramienta útil para mostrar la relación entre conjuntos[[1]](#footnote-1). Imaginemos que tenemos un grupo de estudiantes y los dividimos en dos conjuntos, el conjunto “A” conformado por alumnos inscritos en la materia de cálculo y el conjunto “B” conformado por alumnos inscritos en algebra algebra. La Intersección “A B” es el conjunto de estudiante que pasan clases de cálculo y algebra a la vez. La unión, “AB”, está conformada por todos los estudiantes que asisten a clases de cálculo “o” algebra.

* 1. **Algunas relaciones básicas de probabilidad**

***El complemento de un evento:*** Dado un conjunto A, el complemento de A se define como el evento formado por todos los puntos muestrales que no están en A. El complemento de A se representa con $A^{c}$. De modo tal que la probabilidad de un evento más su complemento da como resultado el cien por ciento. Se puede calcular un complemento restando al total el evento A, asimismo podemos calcular el evento A restando del total el complemento.

 P(A) + P($A^{c}$) = 1 ; P($A^{c}$) = 1- P(A) ; P(A) = 1- P($A^{c}$)

En un diagrama de Ven se puede expresar de la siguiente manera:

 Espacio muestral “S”

 $A^{c}$

 Complemento del evento A

 Evento A

***Eventos mutuamente excluyentes***: Dos eventos son mutuamente excluyentes si la ocurrencia de uno prohíbe la ocurrencia del otro, un ejemplo es el de sacar cara o escudo al lanzar una moneda, cualquiera que sea el resultado prohíbe la ocurrencia del otro.

***Eventos colectivamente exhaustivos***: Consta de todos los posibles resultados de un experimento y constituyen su espacio muestral. Por ejemplo si lanzamos un dado los eventos colectivamente exhaustivos son: P (1o 2 o 3 o 4 o 5 o 6)

***Eventos independientes:*** Son Eventos independientes aquellos en los que la ocurrencia de uno no tiene nada que ver con la ocurrencia del otro, algunos ejemplos incluyen el resultado de un lanzamiento de una moneda y el de un dado a la vez.

**Eventos complementarios:** Son aquellos en los que si un evento no ocurre , el otro debe ocurrir, Si un evento A es lanzar una moneda y que salga cara, el evento complementario seria que salga escudo, claro que los eventos complementarios también son colectivamente exhaustivos porque si no ocurre uno es otro si debe ocurrir.

* 1. **Tablas de contingencia y tablas de probabilidad**

**Tabla de contingencia**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   | Clasificación de empleados |   |
| Genero | Personal | Línea | Auxiliar | Total |
| Hombres | 150 | 90 | 60 | 300 |
| Mujeres | 30 | 180 | 90 | 300 |
| Total | 180 | 270 | 150 | 600 |

**Tabla de Probabilidad**

Probabilidades conjuntas

Aparecen al interior de la tabla

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|   | **Clasificación de empleados** |   |   |
| **Genero** | Personal (P) | Línea (L) | Auxiliar (A) | Total |
| Hombres (H) | 150/600 = | **0,25** | 90/600 = | 0,15 | 60/600 = | 0,10 | 300/600 = | 0,5 |
| Mujeres (M) | 30 /600 = | 0,05 | 180/ 600 = | 0,3 | 90 / 600 = | 0,15 | 300/600 = | **0,5** |
| Total | 180/600 = | 0,30 | 270/600 = | **0,45** | 150 / 600 = | 0,25 | 600/600 = | 1 |

Probabilidades marginales aparecen al margen de la tabla

* 1. **Probabilidad condicional**

Con frecuencia la probabilidad de un evento se ve influida por la ocurrencia de otro evento relacionado. Supongamos que tenemos un evento A con probabilidad P(A). Si obtenemos nueva información y vemos que ha ocurrido un evento relacionado, representado por B, quisiéramos aprovechar esta información para calcular una nueva probabilidad del evento A. Esta nueva probabilidad del evento A se llama Probabilidad condicional y se escribe como P (A/B) o probabilidad de A dado B”

***Probabilidad condicional***: es la probabilidad de que el evento A ocurra, dado que o a condición de que el evento B ya ha ocurrido.

La probabilidad condicional de A dado B es igual a la probabilidad de la intersección de A y B dividido entre la probabilidad de B, como vemos a continuación.



Ejemplo: Si observamos la tabla de probabilidad del anterior apartado….

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|   | **Clasificación de empleados** |   |   |
| **Genero** | Personal (P) | Línea (L) | Auxiliar (A) | Total |
| Hombres (H) | P (HP) | P(HL) | P(HA) | P (H) |
| Mujeres (M) | P(MP) | P(ML) | P(MA) | P (M) |
| Total | P (P) | P (L) | P (A) | P (S) |

.…detectamos que las probabilidades conjuntas son intersecciones porque tienen dos características a la vez, ya sea un hombre que trabaja como auxiliar “P(HA)” o una mujer que trabaja en línea “P(ML)”, a su vez las probabilidades marginales expresan la probabilidad total de cada columna o fila es así que podemos saber la probabilidad de elegir un hombre P (H) indistintamente del empleo que desempeñe, o la probabilidad de elegir a alguien que trabaje en el área de personal P (P), sin importar el su género.

De esta forma podemos determinar muchas probabilidades condicionales, por ejemplo la probabilidad de seleccionar un empleado del área auxiliar dado que sea mujer.



Lo que quiere decir que existe la probabilidad de un 30% de seleccionar un empleado del área auxiliar dado que esta es mujer.

Como observamos que la probabilidad de seleccionar una mujer en esta área es relativamente baja ahora intentaremos el mismo ejercicio con el género masculino



Tenemos una sorpresa, la probabilidad de selección un empleado del área auxiliar dado que sea hombre es apenas del 20% por lo que podemos aseverar que hay preeminencia de mujeres en este sector de la empresa.

**1.7 Dos reglas de Probabilidad**

1. ***Regla de multiplicación.-*** El propósito de la regla de multiplicación es determinar la probabilidad del evento conjunto P(AB). Es decir, para encontrar la probabilidad de “A y B” primero debemos percatarnos si los eventos son dependientes o independientes. Los eventos A y B son independientes si P(A)= P (A/B). Es decir la probabilidad de A es la misma bien se considere o no el evento B. De igual formas A y B son independientes, si P(B) = P(B/A).

Para eventos independientes la probabilidad de los eventos se vuelve:

 P(AB)= P(A) X P(B)

Si los eventos son dependientes, entonces, por definición, se debe considerar el primer evento al determinar la probabilidad del segundo. Es decir, la probabilidad del evento B depende de la condición que A ya haya ocurrido. Se necesita del principio de probabilidad condicional. La probabilidad de los eventos conjuntos A y B es:

 P(AB)= P(A) x P(B/A)

1. **Regla de adición**

La regla de adición se utiliza para determinar la probabilidad de A o B, P(AB)

La probabilidad del evento “A o B” cuando los eventos no son mutuamente excluyentes es la siguiente:

P(AB) = P(A) + P(B) – P(AB)

Vale la pena recordar que los eventos A y B no son mutuamente excluyentes si ambos pueden ocurrir al mismo tiempo. En esta caso, la formula requiere que se reste la probabilidad del evento conjunto A y B).

La probabilidad del evento A o B cuando los eventos son **mutuamente excluyentes** sería la siguiente:

P(AB) = P(A) + P(B)

* 1. **Teorema de Bayes**

Se denomina teorema de Bayes en honor al reverendo Thomas Bayes (1702 – 1761) que desarrolló un concepto útil al calcular ciertas probabilidades, Bayes observo que con frecuencia comenzamos nuestros análisis con estimaciones de probabilidad a priori o iníciales para eventos específicos de interés, entonces, con base en fuentes como una muestra, un informe especial o la prueba de un producto, obtenemos cierta información adicional sobre los eventos. Con esta nueva información modificamos los valores de las probabilidades a priori mediante el cálculo de probabilidades actualizadas a las que llamamos probabilidades a posteriori, es así que el teorema de Bayes proporciona un método para calcular esas probabilidades.

Probabilidades a priori

Información nueva

Probabilidades posteriores

Aplicación del Teorema de Bayes

Como ejemplo del teorema de Bayes supongamos que una empresa utiliza dos máquinas para elaborar su producto. La máquina A produce el 60% de la de la mercancía y el maquina B produce el restante 40%. El 2% de las unidades producidas por A son defectuosas mientras que B tiene una tasa de defectos del 4%.

Si elaboramos un diagrama del árbol para este ejemplo el proceso sería el siguiente:

Determinación de intersecciones

Información nueva

Probabilidades a priori



Este grafico expresa en la primera etapa “Probabilidad a priori”, la probabilidad de que la mercancía se elabore en la maquina A; P(A)=0.6 o en la maquina B: P(B)=0.4, una segunda etapa del proceso nos brinda “Información Nueva”, es decir la segunda parte del proceso que se distingue por los elementos ***no defectuosos***  () y ***unidades defectuosas*** *(D*). Entonces inferimos que la probabilidad que se elabore una unidad no defectuosa que provenga de la maquina A es del 98% : P(/A)= 0.98; puesto que ya dijimos que la probabilidad de que esta máquina arroje productos defectuosos es del 2%: P (D/A)=0.02. Ahora, si observamos la maquina B encontramos que la probabilidad de que en esta máquina se elaboren productos no defectuosos es del 96%: P(/B)= 0.96 y la probabilidad de que se elaboren productos defectuosos es del 4%: P (D/B) = 0.04.

Finalmente observamos que se determinan intersecciones para cada rama, esto es posible porque existen probabilidades condicionales que al multiplicarse con las probabilidades a priori nos dan como resultado las intersecciones, esto por la regla de multiplicación de eventos dependientes. Tomamos como ejemplo la primera rama:

 P (A) = P(A) x P (/A) = 0.60 x 0.98

 = 0.588

Dicho de otra forma, la probabilidad de elegir un producto que provenga de la maquina A y sea no defectuoso es del 58.8%.

Hasta este punto todo parece muy sencillo y nos preguntamos, ¿en qué momento aplicamos el teorema de Bayes?. Bien, es solo hasta este momento que tenemos los elementos necesarios para llevarlo a cabo, puesto que el teorema de Bayes no es otra cosa que una probabilidad condicional que nos lleva en sentido contrario del proceso, es decir nos ayuda a determinar una probabilidad a priori dado la ocurrencia de una probabilidad posterior o nueva.

Si yo quiero aplicar el teorema de Bayes en nuestro ejemplo puedo proponerme el determinar la probabilidad de seleccionar un artículo de la maquina A (probabilidad a priori) dado que este es defectuoso (información por determinar), P (A/D). Mostramos la resolución a continuación:

 1º opción 2º opción 3º opción



Esta ecuación es muy sencilla de resolver si tomamos la segunda opción puesto que ya tenemos desarrollado el diagrama del árbol y este nos presenta toda la información necesaria para solucionar el teorema; si es que no hubiéramos elaborado el diagrama del árbol la tercera opción hubiera sido la más acertada, veamos el resultado.



Este resultado quiere decir que la probabilidad de seleccionar un artículo al azar de la maquina A dado que este es defectuoso es del 42.9%

Si esta es la probabilidad en la maquina A ¿Cuál será la probabilidad de seleccionar un producto de la maquina B dado que este sea defectuoso?, ¿esta probabilidad será mayor o menor a la que resulta en la maquina A?.



Puesto que la probabilidad de seleccionar un producto de la maquina B con antecedente de que es defectuoso es del 57.1%, inferimos que la probabilidad de elegir una mercancía al azar a sabiendas de que es defectuosa es menor para la maquina A que para la maquina B.

* 1. **Técnicas y reglas de conteo**

Muchas decisiones comerciales requieren que se cuente el número de subconjuntos que se pueden obtener de un conjunto. De las ventas de una línea que consta de 10 productos, ¿Cuántos subconjuntos de 3 productos se pueden ofrecer a los clientes?. Siete agentes de ventas están en un concurso para ver quienes ganan un viaje gratis a Cancún, ¿Cuántas ordenes diferentes de dos agentes pueden existir?. Analizaremos dos técnicas y una regla de conteo para responder a estas y otras preguntas. Las técnicas son, permutaciones, combinaciones y la regla de conteo nos servirá para resolver experimentos de etapas múltiples.

1. **Regla de conteo para etapas múltiples.**

La regla de conteo para varias etapas permite determinar el número de resultados experimentales sin listarlos.

Si un experimento se puede describir como una sucesión de K etapas , en las que hay n1 resultados posibles en la primera etapa, n2 en la segunda , etc. , la cantidad total de resultados experimentales es igual a: n1 x n2 x…nk.

Si el experimento de lanzar dos monedas se considera como una sucesión de primero lanzar una moneda (n1=2) y luego lanzar la otra (n2=2) podemos inferir que la regla de conteo que hay (2)(2)=4 resultados experimentales distintos.

1. **Permutaciones.**

Si seleccionamos una serie de subconjuntos de una población y el ***orden en los que se encuentren los elementos del subconjunto si importa*** para diferenciarlo de los otros, entonces estamos hablando de permutaciones. Una permutación se determina mediante la siguiente fórmula:



Donde:

n: Es el número de elementos que tiene el conjunto.

r: Es el número de elementos que tiene el subconjunto.

!: Factorial

P: Permutación

Dado un conjunto de *n* elementos, el numero de permutaciones,- cada uno de tamaño r- se determina con la formula de arriba en donde n! se lee “n factorial” y significa el producto de todos los números de 1 a n. Por tanto 4! = 1 x 2 x 3 x 4 = 24. Por definición 0!=1.

Como ejemplo, consideremos el proceso de control de calidad en que un inspector selección dos de cinco partes (A, B, C, D, E) para hallar defectos. ¿Cuántas permutaciones es posible seleccionar?. La regla de conteo de la permutación se aplicaría con n=5 y r=2 con lo que tendríamos:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| AB | BC | CD | DE |
| BA | CB | DC | ED |
| AC | BD | CE |  |
| CA | DB | EC |  |
| AD | BE |  |  |
| DA | EB |  |  |
| AE |  |  |  |
| EA |  |  |  |

Sean los elementos A, B, C, D, E las permutaciones de dos elementos que se pueden obtener son las que vemos en este cuadro.

1. **Combinaciones.**

Las combinaciones nos permiten contar la cantidad de resultados experimentales cuando en un experimento se deben seleccionar *r* objetos de un conjunto *n* en el que ***el orden de los subconjuntos r no es de importancia***. Una combinación se determina mediante la siguiente formula.



Donde:

n: Es el número de elementos que tiene el conjunto.

r: Es el número de elementos que tiene el subconjunto.

!: Factorial

C: Combinación

Recurriendo al ejemplo, de control de calidad en el que seleccionamos cinco artículos (A, B, C, D, E) y elegimos subconjuntos de dos; veamos las posibles combinaciones.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| AB | BC | CD | DE |
| AC | BD | CE |  |
| AD | BE |  |  |
| AE |  |  |  |

Sean los elementos A, B, C, D, E las combinaciones de dos elementos que se pueden obtener son las que vemos en este cuadro.

**La diferencia entre una combinación y una permutación**: si tomamos el ejemplo anterior el primer subconjunto que elegimos fue estuvo conformado por A y B, para el caso de permutaciones con estos elementos se conformaron los siguientes subconjuntos (A,B) y (B,A) en tanto que para combinaciones basto con el subconjunto (A,B). Ambos tienen los mismos elementos pero difieren solo en el orden, ***para permutaciones el orden si importa*** por lo que se pueden crear más subconjuntos cambiando el orden en tanto que ***para combinaciones el orden no interesa*** y se considera un solo subconjunto aunque los elementos al interior estén en orden diferente.

1. Fue desarrollada por John Venn (1834 – 1923) [↑](#footnote-ref-1)