TEMA Nº 5

|  |
| --- |
| PRUEBAS DE HIPOTESIS |
| *Función de la prueba de hipótesis**Nivel de significancia y probabilidad de error**Pasos para establecer una prueba de hipótesis**pruebas de dos colas para µ**Prueba de una cola para µ**Pruebas para µ, muestras pequeñas**Pruebas para π* |
| Lic. Henry Rukner Reynaga Arce |

Copiright 2000. Estadística Aplicada a los Negocios y

la economía. Allen L Webster

**TEMA 5**

**PRUEBAS DE HIPOTESIS**

**5.1 Función de la prueba de hipótesis**

La prueba de hipótesis comienza con una suposición, llamada hipótesis, que hacemos con respecto a un parámetro de población. Después recolectamos datos de muestra, producimos estadísticas de muestra y usamos esta información para decidir qué tan probable es que sea correcto nuestro parámetro de población acerca del cual hicimos la hipótesis.

Como el propósito del análisis estadístico es reducir el nivel de incertidumbre en el proceso de toma de decisiones, la prueba de hipótesis se convierte en una herramienta muy efectiva para obtener esta valiosa información, bajo una gran variedad de circunstancias.

**El concepto de prueba de hipótesis**

Para realizar una prueba de hipótesis, se hacen algunas inferencias o supuestos acerca de la población. Podemos plantear una hipótesis cualquiera, por ejemplo que el contenido promedio de una botella gaseosa es de 2.5 litros de acuerdo al información que presenta en su empaque. Esta **hipótesis nula** (:) se prueba contra una **hipótesis alternativa** (:) que establece lo contrario: El contenido promedio de la botella de gaseosa no es 2.5 litros (µ2.5 lts.)

Planteando ambas hipótesis tendríamos:

 : µ=2.5 : µ2.5

¿Por qué denominamos hipótesis nula a la primera hipótesis que planteamos?. El término nulo implica nada o nulo, el concepto de hipótesis nula como tal surge de las primeras aplicaciones agrícolas y medicas de la estadística. Con el fin de probar la efectividad de un nuevo fertilizante o de una nueva medicina, la primera hipótesis que se planteaba era que *no se tenía ningún efecto*, es decir no había diferencias entre las muestras tratadas y las no tratadas. Si los resultados de nuestra muestra, no respaldan la hipótesis nula debemos concluir que se cumple alguna otra cosa (en este caso la hipótesis alternativa).

La hipótesis nula, tradicionalmente contiene alguna referencia de igualdad como “=”, “≥” y “≤”.

*Mucha atención*: Con base en datos muestrales, la hipótesis nula es rechazada o no rechazada. Nunca se puede “aceptar” una hipótesis nula como verdadera. El no rechazo de la hipótesis nula solamente significa que la evidencia muestral no es lo suficientemente fuerte para llevar a su rechazo. Incluso si =2.5, no prueba que =2.5. Podría ser otro valor diferente, claro que debido al error de muestreo la media muestral acaba de igualar al valor de 2.5 que se plantea como hipótesis.

Antes de rechazar una hipótesis nula, la media muestral debe diferir significativamente de la media poblacional planteada como hipótesis. Es decir que la evidencia debe ser muy convincente y concluyente. Una conclusión con base en un rechazo de la hipótesis nula es más significativa que una que termine en decisión de no rechazo.

Si observamos en una muestra de n botellas de gaseosa que el contenido promedio es =2.35 y no =2.5 como indica la etiqueta del envase, ¿podemos concluir que la media poblacional no es 2.5?. Tenemos claro que ¡2.35 no es 2.5!. Probablemente no. La pequeña diferencia de 0.15 lt que existe entre 2.5 y 2.35 podría ser “*estadísticamente insignificante”* puesto que podría explicarse fácilmente con un simple error de muestreo. Es decir que debido al error de muestreo es posible tener una media con una población de 2.5 y una media muestral de =2.35. En la muestra pueden existir observaciones con contenidos que están por debajo de la media poblacional también pueden hallarse botellas con un contenido superior. La evidencia muestral que =2.35 no es lo suficientemente fuerte como para desencadenar un rechazo de la hipótesis nula =2.5, esto se le denomina evidencia estadísticamente insignificante.

***Diferencia estadísticamente insignificante:*** Diferencia entre el valor de la media poblacional bajo la hipótesis y el valor de la media muestral que es lo suficientemente pequeña como para atribuirla a un error de muestreo.

En el ejemplo que acabamos de ver, la diferencia de 0.15 lts entre =2.5 y =2.35 ¿resulta ser insignificante estadísticamente o no?. La duda que tenemos ahora es: ¿cuán grande debe ser la diferencia entre la media poblacional y la media muestral para que esta se considere significativa, y nos lleve al rechazo de la hipótesis nula?. Para resolver la duda solo debemos recordar los conceptos del tema de distribuciones de muestreo en el que indicamos que se puede estandarizar toda unidad de medida (como litros en nuestro ejemplo), a valores Z (errores estándar) mediante la fórmula Z:



Recordemos que si es desconocida, se utiliza la desviación estándar muestral s.

La regla empírica de la distribución normal nos indica que el 95% de todas las medias muestrales (s) se encuentran inmersas en el 95% de la distribución central que se ubica a 1.96 errores estándar con respecto a la media poblacional. Si la diferencia que existe entre la media poblacional y la media muestral supera los 1.96 errores estándar del lado positivo o negativo de la distribución, esta diferencia se hace estadísticamente significativa a un 95% de confianza, es decir que podemos rechazar la hipótesis nula.



 **Valores críticos Z y zonas de rechazo**

En el cuadro anterior observamos que al concentrar el 95% de la distribución en la zona central el 5% restante queda distribuido en las colas, con un 2.5% de área cada una. Este 5% es el **nivel de significancia** o el nivel alfa () de la prueba.

Estos valores críticos de Z de 1.96 (a un 5% de nivel de significación) permiten establecer una regla de decisión si se rechaza la hipótesis nula o no. La regla de decisión es:

**Regla de decisión:**

No rechazamos la hipótesis nula de los valores están a 1.96.

Rechazamos la hipótesis nula su Z es menor que -1.96 o mayor que +1.96.

Solo el 5% de la distribución de se encuentra repartida en ambas colas, es decir solo el 5% de todas las medias muestrales pueden caer en este intervalo pues solo el 5% de las medias muestrales se encuentra ahí y pueden ser rechazadas a 1.96 errores estándar.

**5.2 Nivel de significancia y probabilidad de error**

Al probar una hipótesis se pueden cometer dos tipos de errores:

**Error tipo I, Rechazar una hipótesis verdadera**: La probabilidad de cometerlo es igual al nivel de significación ()

**Error tipo II, No rechazar una hipótesis nula que es falsa**: Su probabilidad se simboliza como (beta)

Existe un equilibrio entre estos dos tipos de errores, la probabilidad de cometer un tipo de error puede reducirse solo si deseamos incrementar la probabilidad de cometer el otro tipo de error. Por ejemplo si reduciríamos el área de no rechazo del 95% al 50%, esta se haría bastante pequeña, rara vez no rechazariamos una hipótesis nula cuando no sea cierta, pero como precio de esta seguridad a menudo rechazaremos una hipótesis nula cuando es cierta. Puesto de otra manera, con el fin de obtener una  baja, tendremos que tolerar una  alta. Para lidiar con este equilibrio en situaciones personales y profesionales los responsables en toma de decisiones deciden el nivel de significancia adecuado.

Preferencia por el error tipo I (Rechazar una hipótesis nula cuando es cierta): Supongamos que cometer el error tipo I implica tiempo y los problemas de volver a trabajar un lote de compuestos químicos que debieran haber sido aceptados. Al mismo tiempo, cometer un error tipo II (aceptar la hipótesis nula cuando es falsa) significa arriesgarse a que todo un grupo de consumidores de este compuesto químico se envenenen. Evidentemente, la administración de esta compañía preferiría el error tipo I sobre el de tipo II y como resultado establecerá niveles de significancia () muy altos en sus pruebas para obtener betas () bajas.

**5.3 Pasos para establecer una prueba de hipótesis**

Los pasos involucrados en la prueba son los siguientes:

1. Plantear la hipótesis
2. Interpretar todos los datos que ofrece el enunciado, diferenciando los parámetros de los estadísticos: (
3. Establecer el o los valores críticos.
4. Con base en la muestra, calcular el valor del estadístico de prueba Z.
5. Determinar la regla de decisión con base en los valores críticos de Z.
6. Interpretación y conclusiones.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Pasos** | **Pruebas de dos colas** | **Pruebas en cola izquierda** | **Pruebas en cola derecha** |
| 1. Plantear la hipótesis
 | Ho: µ =Ha: µ  | Ho: µ ≥Ha: µ < (zona de rechazo) | Ho: µ ≤Ha: µ > (zona de rechazo) |
| 1. Interpretar datos
 |  |  |  |
| 3. Establecer valores críticos |  n.s. Z crit: 0.1 1.645 0.05 1.96 0.01 2.575 |  n.s. Z crit: 0.1 - 1.28 0.05 - 1.645 0.01 - 2.33 |  n.s. Z crit: 0.1 + 1.28 0.05 + 1.645* 1. + 2.33
 |
| 1. Calculo del estadístico: prueba Z
 |  |  |  |
| 1. Regla de decisión
 | No rechazar hipótesis nula si Zo (Z observado) cae en la zona de no rechazo ej: | No rechazar hipótesis nula si Zo (Z observado) cae en la zona de no rechazo ej: | No rechazar hipótesis nula si Zo (Z observado) cae en la zona de no rechazo ej: |
| 1. Interpretación y conclusiones
 | Interpretar en función de la variable y la regla de decisión. | Interpretar en función de la variable y la regla de decisión. | Interpretar en función de la variable y la regla de decisión. |



**Caso práctico para el caso de pruebas de hipótesis de dos colas**

Como gerente de compras de una gran empresa de seguros usted decide si actualizar o no las fotocopiadoras de la oficina. A usted se le ha dicho que el precio promedio de las mismas es de 2.100 dólares. Una muestra de 64 minoristas revela un precio promedio de 2.251 dólares con una desviación estándar de 812 dólares. ¿a un nivel de significancia del 5% parece que su información es correcta?.

**Paso 1:** planteamiento de la hipótesis.

Ho: µ = 2100

Ha: µ  2100

**Paso 2:** Interpretar datos

 n = 64 = 2251 s = 812 n.s. =0.05

**Paso 3:** Establecer valores críticos.

n.s.: 0.05

Zcritico: 1.96

**Paso 4:** Calculo del estadístico de prueba Z (z observado)



 Zona de no rechazo de Ho

 Zona de rechazo Ho Zona de rechazo Ho

 0.025 0.4750 0.4750 0.025

 -1.96 0  **1.49** + 1.96

 2100 2251

 **µ** 

**Paso 5:** Regla de decisión

No rechazamos la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5% porque Z observado cae en la región de no rechazo: 

**Paso 6:** Interpretación y conclusiones

La diferencia entre el valor de la media poblacional µ = 2100 y la media muestral = 2251, es estadísticamente insignificante, podría resultar simplemente del error de muestreo. Por tanto no rechazo mi hipótesis nula, el precio promedio de las fotocopiadoras es de 2100 dólares.

**Ejemplo práctico en el caso de pruebas en la cola izquierda**

Según un estudio, muchas empresas están tratando de comercializar sus productos entre los más jóvenes. El resultado sugiere que los consumidores habían caído por debajo de la edad de 34.4 años que caracterizó los comienzos de la década. Si una muestra de 1000 clientes reporta una media de 33.2 años y una desviación estándar de 9.4, ¿Qué se concluye a un nivel de significancia del 4%?

**Paso 1:** planteamiento de la hipótesis.

Ho: µ ≥ 34.4

Ha: µ < 34.4

**Paso 2:** Interpretar datos

 n = 1000 = 33.2 s = 9.4 n.s. =0.04

**Paso 3:** Establecer valores críticos.

n.s.: 0.04

Z critico: Z < - 1.75

**Paso 4:** Calculo del estadístico de prueba Z



 Zona de no rechazo Ho

 Zona de rechazo Ho

 0.04 0.4600 0.5000

 -4.04 -1.75 0

 33.2 34.4

 **µ**

**Paso 5:** Regla de decisión

Rechazamos la hipótesis nula a un nivel de significancia del 4% porque Z observado cae en la región de rechazo: (Z observado menor a Z critico)

**Paso 6:** Interpretación y conclusiones

La diferencia entre el valor de la media poblacional µ = 34.4 y la media muestral = 33.2, es estadísticamente significativa. Por tanto rechazo mi hipótesis nula, la edad promedio de consumidores es menor a 34.4 años.

**Ejemplo práctico para el caso de pruebas en cola derecha.**

Durante mucho tiempo la empresa en la que trabajamos ha invertido dinero en publicidad con el objeto de incrementar las ventas semanales por encima de Bs. 7880 que la empresa experimento en el pasado. Una muestra de 36 semanas da una media de Bs. 8023 con una desviación estándar de Bs. 1703. A un nivel de significancia de 1%. ¿Parece que la publicidad ha producido efecto?

**Paso 1:** planteamiento de la hipótesis.

Ho: µ ≤ 7880

Ha: µ > 7880

**Paso 2:** Interpretar datos

 n = 36 = 8023 s = 1703 n.s. =0.01

**Paso 3:** Establecer valores críticos.

n.s.: 0.01

Z critico: Z > 2.33

**Paso 4:** Calculo del estadístico de prueba Z



 Zona de no rechazo de Ho

 Zona de rechazo de Ho

 05000 0.4900

 0.01

 0  **0.50** 2.33

 7880 8023

 **µ** 

**Paso 5:** Regla de decisión

No rechazamos la hipótesis nula a un nivel de significancia del 1% porque Z observado cae en la región de no rechazo: (Z observado menor a Z critico)

**Paso 6:** Interpretación y conclusiones

La diferencia entre el valor de la media poblacional µ = 7880 y la media muestral = 8023, es estadísticamente insignificante, podría resultar simplemente del error de muestreo. Por tanto no rechazo mi hipótesis nula, las ganancias promedio aún son menores o iguales a Bs. 7880, la publicidad no tuvo un efecto determinante.

**Ejemplo práctico para µ, en el caso de muestras pequeñas**

Igual que en intervalos de confianza, si la muestra es pequeña**, **desconocida y la población es normal o casi normal a su distribución, puede usarse t.

El nuevo bombillo inventado por Sun Sistem está diseñado para incrementar la vida útil de los bombillos a más de 5.000 horas que es el promedio de los que actualmente existen. ¿Podemos comprobar que el nuevo producto proporciona una mejora si verificamos en 25 bombillos fundidos, una vida promedio de 5117 horas, con s=1886 horas? Fije un α=5%. Presumimos una distribución cuasi normal.

**Paso 1:** planteamiento de la hipótesis.

Ho: µ ≤ 5000

Ha: µ > 5000

**Paso 2:** Interpretar datos

 n = 25 = 5117 s = 1886 n.s. =0.05

**Paso 3:** Establecer valores críticos.

n.s.: 0.05

t critico: Z > 

 Z > 

 Z > 1,711

**Paso 4:** Calculo del estadístico de prueba t



 Zona de no rechazo

 Zona de rechazo

 05000 0.4900

 0.05

 0  **0.31** 1,711

 5000 5117

 **µ** 

**Paso 5:** Regla de decisión

No rechazamos la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5% porque t observada cae en la región de no rechazo: (t observada menor a t critico)

**Paso 6:** Interpretación y conclusiones

La diferencia entre el valor de la media poblacional µ = 5000 y la media muestral = 5117, es estadísticamente insignificante, podría resultar simplemente del error de muestreo. Por tanto no rechazo mi hipótesis nula, el tiempo de vida útil de las bombillas aun es igual o menor a 5000 horas, las mejoras no son notorias.

**Pruebas para proporciones**

El proceso de prueba de hipótesis para la proporción poblacional (P), es muy similar al de µ. Un valor Z calculado a partir de la muestra se compara con un valor crítico Z con base en el valor α seleccionado. Z se calcula:



Donde:

p: es la proporción muestral de las observaciones que se consideran “éxitos”

: Es el valor planteado como hipótesis para la proporción poblacional.

: es el error estándar de la proporción muestral.

Un error,  mide la tendencia de las proporciones muestrales a desviarse de la proporción poblacional desconocida.

Se calcula así.

*Error estándar de la distribución muestral de las proporciones muestrales*



Ejemplo:

Tradicionalmente el 35% de todos los créditos otorgados por el banco han sido a pequeños y medianos empresarios (PyMES). Durante el año pasado, el banco ha hecho esfuerzos por incrementar esta proporción. De 150 créditos actualmente en curso, 40% están identificados claramente por haber sido otorgados a PyMES. ¿El banco ha tenido éxito en sus esfuerzos por atraer más clientes de las minorías?. Pruebe la hipótesis con un nivel de significancia del 5%.

**Paso 1:** planteamiento de la hipótesis.

Ho: P ≤ 0.35

Ha: P > 0.35

**Paso 2:** Interpretar datos

 n = 150 p= 0.4 

**Paso 3:** Establecer valores críticos.

n.s.: 0.05

Z critico: Z +1.645

**Paso 4:** Calculo del estadístico de prueba Z



 Zona de no rechazo

 Zona de rechazo

 05000 0.4900

 0.05

 0  **1.29 1.645**

 0.36 0.40

 **µ** 

**Paso 5:** Regla de decisión

No rechazamos la hipótesis nula a un nivel de significancia del 5% porque Z observado cae en la región de no rechazo: ( Z observado menor a Z critico)

**Paso 6:** Interpretación y conclusiones

La diferencia entre el valor de la media poblacional µ = 0.35 y la media muestral = 0.40, es estadísticamente insignificante, podría resultar simplemente del error de muestreo. Por tanto no rechazo mi hipótesis nula, la proporción de préstamos a MyPES es igual o menor al 35% a un nivel de significación del 95%.